EXERCICE N°2 : 30' 6 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $A(1,0,1)$ et $I(1,-1,1)$.

1°) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z+2=0$.

a) Montrer que (S) est une sphère de centre $I(1,-1,1)$ et de rayon $R=1$.

b) Vérifier que (S) est tangente aux plans $(O,\vec{i},\vec{j})$, $(O,\vec{i},\vec{k})$ et $(O,\vec{j},\vec{k})$.

2°) Soit P le plan dont une équation : $x-y+z-2=0$.

a) Vérifier que la droite (OI) est perpendiculaire à P.

b) Montrer que P coupe (S) en un cercle C dont on précisera le centre H et le rayon r.

3°) Dans la suite de l'exercice α est un réel et N est un point de la droite (OI) de coordonnées $(\alpha,-\alpha,\alpha)$.

a) Vérifier que $AN=\sqrt{3\alpha^2-4\alpha+2}$.

b) Préciser le point N pour lequel la distance AN est minimale.

c) Vérifier qu'une équation du plan P_α passant par N et parallèle à P est : $x-y+z-3\alpha=0$

d) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le plan P_α est tangent à (S).

EXERCICE N°3 : 20' 4 points

On considère une fonction f continue sur $[0,+\infty[$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

1°) Utiliser le tableau de variation pour répondre aux questions suivantes :

a) Trouver un encadrement de f sur $[0,+\infty[$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{f(x)-1}$.

2°) Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0,1]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de [0 ;1] sur un intervalle que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

3°) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Dresser le tableau de variation de g puis construire la courbe C.

4°) Soit $I=\int_0^1 g(x)\,dx$ et $J=\int_0^1 x\,g'(x)\,dx$.

a) Donner une interprétation graphique de I.

b) Montrer que $1\le I\le 2$.

c) Calculer $I+J$.

d) En déduire que : $0\le J\le 1$.

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn